Problema de audio resuelto por FFT

Audio problem solved by FFT

Autor: Jhoao Alejandro Martínez Londoño

*IS&C, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia*

Correo-e: jhoao.martinez@utp.edu.co

*Resumen*— La transformada rápida de Fourier (FFT) es un algoritmo eficiente que permite calcular la transformada de Fourier discreta (DFT) y su inversa. La FFT es de gran importancia en una amplia variedad de aplicaciones, desde el tratamiento digital de señales y filtrado digital en general a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales o los algoritmos de multiplicación rápida de grandes enteros.

***Palabras clave-* Algoritmo, derivada, Fourier, señales, transformada.**

*Abstract*— The fast Fourier transform (FFT) is an efficient algorithm that allows the discrete Fourier transform (DFT) and its inverse to be calculated. FFT is of great importance in a wide variety of applications, from digital signal processing and digital filtering in general to solving partial derivative equations or fast multiplication of large integers algorithms.

*Key Word*— Algorithm, derivative, Fourier, signals, transform.

### INTRODUCCIÓN

El origen de la FFT es la transformada discreta de Fourier (DTF), que es una transformada matemática que nos permite convertir señales del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo, y viceversa.

Los programas de análisis de audio como Smaart o SATLive utilizan una versión de la DTF llamada FFT (Fast Fourier Transform). El algoritmo de la FFT fue desarrollado por los matemáticos estadounidenses J.W.Cooley y J.W.Tukey en 1965 y podríamos decir que es una versión de la DTF optimizada para facilitar el cálculo computacional.

1. LA TRANSFORMADA DE FOURIER

El concepto matemático que hoy conocemos como transformada de Fourier fue introducido por Joseph B. Fourier en 1811, en conexión con un tratado sobre la propagación del calor, mediante un argumento de paso al límite (del discreto al continuo) a partir de las series que también llevan su nombre.

La transformada de Fourier –y el análisis armónico en general– constituye hoy una de las herramientas más útiles para el estudio y el tratamiento de múltiples aspectos de las ecuaciones en derivadas parciales.

La transformada Fourier de una señal unidimensional o función continua es una transformación de dicha señal que nos permite calcular la contribución de cada valor de frecuencia a la formación de la señal.

  
Figura 1. Expresión matemática del cálculo de la transformada de Fourier, donde i = √-1, exp[-i2πux] = cos(2πux) – i\*sen(2πux) y la variable u representa las frecuencias.

Además, es posible demostrar que esta transformada tiene inversa, ya que a partir de F(u) es posible calcular f(x)



Figura 2. Transformada inversa de Fourier.

Estas dos funciones F(u) y f(x) se denominan un par de transformadas Fourier. En general las funciones con las que trataremos en problemas reales verificarán las condiciones que es necesario imponer para que las expresiones anteriores puedan calcularse.

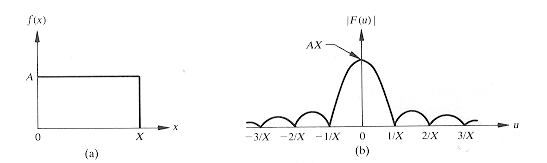


Figura 3. Transformada de Fourier (derecha) de una señal simple (izquierda).

La transformada de Fourier se utiliza para pasar una señal al dominio de frecuencia para así obtener información que no es evidente en el dominio temporal. Por ejemplo, es más fácil saber sobre qué ancho de banda se concentra la energía de una señal analizándola en el dominio de la frecuencia.

La transformada también sirve para resolver ecuaciones diferenciales con mayor facilidad y, por consiguiente, se usa para el diseño de controladores clásicos de sistemas realimentados, si conocemos la densidad espectral de un sistema y la entrada podemos conocer la densidad espectral de la salida. Esto es muy útil para el diseño de filtros de radiotransistores.

La transformada de Fourier también se utiliza en el ámbito del tratamiento digital de imágenes, como por ejemplo para mejorar o definir más ciertas zonas de una imagen fotográfica o tomada con una computadora

1. TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

Cuando se habla del tratamiento digital de señales, el algoritmo FFT impone algunas limitaciones en la señal y en el espectro resultante ya que la señal muestreada y que se va a transformar debe consistir de un número de muestras igual a una potencia de dos. La mayoría de los analizadores de FFT permiten la transformación de 512, 1024, 2048 o 4096 muestras. El rango de frecuencias cubierto por el análisis FFT depende de la cantidad de muestras recogidas y de la proporción de muestreo.

La transformada rápida de Fourier es de importancia fundamental en el análisis matemático y ha sido objeto de numerosos estudios. La aparición de un algoritmo eficaz para esta operación fue un hito en la historia de la informática.

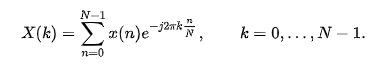


Figura 4. Transformada discreta de Fourier siendo x(n) una señal aperiódica discreta en el tiempo y X(k) un conjunto de números complejos.

La evaluación directa de esa fórmula requiere N2 operaciones aritméticas, pero con un algoritmo FFT se puede obtener el mismo resultado con N\*log(N) operaciones, reduciendo considerablemente el grado de complejidad.

La idea que permite esta optimización, es la descomposición de la transformada a tratar en otras más simples y éstas a su vez hasta llegar a transformadas de 2 elementos donde k puede tomar los valores 0 y 1. Una vez resueltas las transformadas más simples hay que agruparlas en otras de nivel superior que deben resolverse de nuevo y así sucesivamente hasta llegar al nivel más alto. Al final de este proceso, los resultados obtenidos deben reordenarse.

Dado que la transformada discreta de Fourier inversa es análoga a la transformada discreta de Fourier, con distinto signo en el exponente y un factor 1/n, cualquier algoritmo FFT puede ser fácilmente adaptado para el cálculo de la transformada inversa discreta de Fourier (conocida por su sigla inglesa, IDFT).

1. ANALIZADORES FFT

Uno de los aspectos fundamentales a la hora de trabajar con la FFT en analizadores es el tamaño de la misma:

Es posible definir el tamaño de la FFT como el número de datos que el analizador toma en cada medición.

El tamaño de la FFT, junto con la frecuencia de muestreo que utilice el analizador, nos va a dar dos datos fundamentales para entender la información que nos va a mostrar el software de medición: La constante de tiempo y la frecuencia de resolución.

**Constante de Tiempo (TC):** La constante de tiempo es simplemente el tiempo que se tarda en registrar muestras suficientes para una FFT de un tamaño concreto, a una velocidad de muestreo concreta.

Las constantes de tiempo más grandes proporcionan una resolución en frecuencia más detallada (normalmente demasiado detallada en alta frecuencia), pero a cambio de una resolución temporal menos detallada.

En cierta forma actúa de forma similar al obturador de una cámara fotográfica: Sólo es posible capturar o analizar las frecuencias que hayan dado un ciclo completo dentro de la constante de tiempo.

Un ejemplo concreto sería el siguiente: Un analizador cuenta con un tamaño de FFT de 128 samples, y una frecuencia de muestreo de 48.000Hz. Su constante de tiempo se obtiene al dividir la FFT entre la frecuencia de muestreo (TC=FFT/FM; TC=128/48000=2,67 milisegundos). Por tanto, el analizador muestra información cada 2,67 milisegundos (muy rápida).

Si fuera una FFT de 32k con una frecuencia de muestreo de 48.000Hz, la constante de tiempo sería de 682 milisegundos (lenta).

**Frecuencia de resolución:** La frecuencia de resolución indica a partir de qué frecuencia el analizador va a mostrar datos, y también cada cuanto va a tomar muestras.

La frecuencia de resolución se puede calcular dividiendo la frecuencia de muestreo entre el tamaño de la FFT (FR=FM/FTT).

Un ejemplo es el siguiente: Para una FFT de 128 samples, la frecuencia de resolución será 375Hz (48000/128). Por tanto, el analizador no mostrará nada por debajo de 375Hz.

Y si se calcula el periodo de 375Hz (T=1/f) se retorna al dato de la constante de tiempo obtenida anteriormente (2,67mseg).

Por tanto, todo coincide: Un analizador con un tamaño de FFT de 128 no va a darnos información por debajo de 375Hz (no hay información en baja frecuencia) y va a tener una respuesta temporal de 2,67mseg (rápida).

### REFERENCIAS

Ramírez Cortés, Juan Manuel; Gómez Gil, María del Pilar; Báez López, David (Marzo - Abril de 1998). «El algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier y su controvertido origen»

Referencias en la Web:

1. <https://www.ugr.es/~jllopez/Cap2-Fourier.pdf>
2. <http://www6.uniovi.es/vision/intro/node19.html>
3. <https://www.emis.de/journals/DM/v5/art6.pdf>